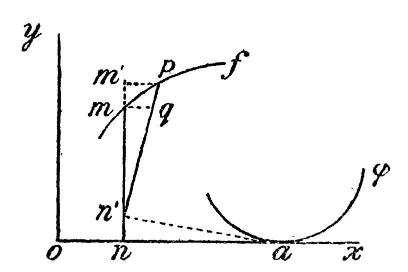
Note sur les lignes cycloïdales.

PAR RENÉ DE SAUSSURE.

Les formules générales relatives aux roulettes ont été données sous diverses formes, correspondant à divers systèmes de coordonnées. Il y a certains cas où l'on arrive à des équations très-simples en se servant simultanément des coordonnées cartésiennes et des coordonnées intrinsèques.

Une courbe dont l'équation intrinsèque est $\rho = \phi(\sigma)$ roule sur une droite ; un point m du plan entraîné dans le mouvement décrit la trajectoire $y = f(x)$, l'axe des x étant la droite sur laquelle roule la courbe. Le problème consiste, étant donnée l'une des courbes ϕ ou f, à trouver l'autre.



Lorsque la courbe ϕ tourne d'un angle $d\alpha = \frac{d\sigma}{\rho}$, le point m vient en p, le point n en n', et l'ordonnée mn en $n'p$. L'angle $mn'p = d\alpha = \frac{\overline{mq}}{\overline{mn'}} = \frac{dx}{y}$.

Si l'on décrit l'arc de cercle $\overline{pm'}$ en prenant n' comme centre, on aura $\overline{mn} = \overline{n'p} = \overline{n'm'}$ et par suite $\overline{nn'} = \overline{mm'} = dy$. D'autre part l'angle $\overline{nan'} = d\alpha = \frac{\overline{nn'}}{\overline{na}} = \frac{dy}{\sigma - x}$. Egalant les trois valeurs trouvées pour $d\alpha$, on a finalement :

$$\frac{d\sigma}{\rho} = \frac{dy}{\sigma - x} = \frac{dx}{y},$$

équations qui résolvent le problème. Ces équations permettent de plus, étant donnée la courbe f de trouver la courbe ϕ sans effectuer de quadrature, car en les résolvant on obtient:

$$\begin{cases} \sigma = x + y\dfrac{dy}{dx}, \\ \rho = y\dfrac{d\sigma}{dx}, \end{cases}$$

et il n'y a qu'à éliminer x entre ces deux équations. Supposons par exemple que la courbe f soit une conique dont un des axes coïncide avec l'axe des x. Son équation peut se mettre sous la forme: $y^2 = ax^2 + b$, d'où l'on tire: $y\dfrac{dy}{dx} = ax$, et par suite:

$$\begin{cases} \sigma = (a+1)\,x, \\ \rho = (a+1)\,y. \end{cases}$$

Eliminant x et y, on trouve pour équation de la courbe roulante: $\rho^2 = a\sigma^2 + b\,(a+1)^2$. Lorsque la conique est une ellipse, $(a < 0)$, cette équation représente une épicycloïde; d'ailleurs dans ce cas b doit être positif. Lorsque la conique est une hyperbole, $(a > 0)$, l'équation précédente représente une famille intéressante de courbes, dont la forme varie suivant que b est négatif ou positif (c'est-à-dire suivant l'axe de l'hyperbole qui est pris comme base du roulement). Ces courbes ne semblent pas avoir été jusqu'ici considérées comme appartenant à la famille des "lignes cycloïdales"; or chaque fois que la recherche d'un lieu conduit à une ligne cycloïdale, les courbes précédentes satisfont aussi au problème, ce qui montre qu'elles ont les mêmes propriétés. C'est ainsi que Mr. Puiseux les a rencontrées en cherchant les courbes qui sont semblables à leur développée n^{me}. Mr. Laisant et Mr. Cesaro en parlent aussi conjointement avec les lignes cycloïdales, à propos d'autres propriétés, mais je crois sans les considérer comme des lignes cycloïdales. Or, elles peuvent être engendrées par le roulement d'un cercle sur un autre cercle, elles rentrent par conséquent dans la définition ordinaire des lignes cycloïdales. Cette génération, à peu près évidente, mérite pourtant d'être prise en considération et il serait désirable de donner à ces courbes des noms appropriés à leur nature. On pourrait par exemple appeler "paracycloïde" toute ligne cycloïdale pour laquelle $a > 0$ et $b < 0$ et "hypercycloïde" celle pour laquelle $a > 0$ et $b > 0$. Ainsi l'hyperbole est engendrée par le roulement d'une paracycloïde sur son axe principal ou par celui d'une hypercycloïde sur son axe conjugué.

Comme l'équation intrinsèque des lignes cycloïdales engendrées par un point d'un cercle de rayon r roulant sur un cercle fixe de rayon R est:

$$\rho^2 = -\frac{R^2}{(2r-R)^2}\sigma^2 + 16r^2\frac{(r-R)^2}{(2r-R)^2},$$

on voit que lorsque R et r sont réels la courbe est une épicycloïde. Si l'on pose $r = \frac{R}{2} + qi$ (R étant toujours réel), l'équation précédente ne contient pas d'imaginaires et de plus $a > 0$, $b < 0$; la paracycloïde est donc engendrée par le roulement d'un cercle imaginaire de rayon $\frac{R}{2} + qi$ (q étant une constante arbitraire) sur un cercle réel de rayon R.* Si l'on pose $r' = \frac{R}{2} - qi$ on retrouve la même paracycloïde; celle-ci est donc susceptible d'une double génération comme les épicycloïdes (car $r + r' = R$). La forme de la courbe est analogue à celle d'une développante de cercle; elle a un point de rebroussement qui correspond au sommet de l'hyperbole. Lorsqu'elle roule sur une droite le point qui décrit l'hyperbole est toujours le centre du cercle R. La paracycloïde admet pour asymptotes les deux spirales logarithmiques $\rho = \pm\sqrt{a}\,\sigma$, qui correspondent aux asymptotes de l'hyperbole (ces asymptotes sont imaginaires pour les épicycloïdes); enfin la normale de la paracycloïde est toujours extérieure au cercle R, le centre instantané des deux cercles devant être imaginaire. Lorsque $b = 0$, l'hyperbole se réduit aux droites $y = \pm\sqrt{a}\,x$ et la paracycloïde dégénère en spirales logarithmiques $\rho = \pm\sqrt{a}\,\sigma$.

Si maintenant l'on pose $r = p + \frac{R}{2}i$ (le rayon du cercle fixe étant Ri et p étant une constante arbitraire) les coefficients de l'équation intrinsèque sont encore réels et de plus $a > 0$, $b > 0$; l'hypercycloïde est donc engendrée par le roulement d'un cercle imaginaire sur un cercle imaginaire fixe dont le centre est réel. C'est toujours ce centre qui décrit l'hyperbole. En posant $r' = -p + \frac{R}{2}i$ on trouve la même hypercycloïde et par conséquent le même théorème sur la

*Il est facile de voir comment une courbe imaginaire peut en roulant sur une courbe réelle (ou imaginaire) engendrer une courbe réelle, car pour définir un déplacement du plan, il faut définir les déplacements de deux de ses points. Donc un point unique peut décrire une trajectoire réelle sans que pour cela le déplacement du plan soit nécessairement réel; mais si le déplacement est imaginaire, il n'y aura jamais plus d'un point du plan décrivant une courbe réelle.

double génération (car $r + r' = Ri$). La courbe a toujours la forme de spirale, mais le point de rebroussement a disparu. Elle admet les mêmes asymptotes que la paracycloïde. Enfin la développée de l'hypercycloïde est une paracycloïde et réciproquement.

Si la conique donnée est une parabole $y^2 = 2px$, on trouvera par la même méthode que la courbe roulante est une développante de cercle $\rho^2 = 2p\sigma$, c'est-à-dire encore une ligne cycloïdale. Ainsi toute conique peut être considérée comme engendrée par le roulement sur l'un quelconque de ses axes d'une ligne cycloïdale; le point décrivant la conique est toujours le centre du cercle R.

Il peut être utile de remarquer que les quantités ρ et σ sont les coordonnées cartésiennes du centre de courbure de la courbe roulante, correspondant au point de contact, puisque σ est égale à l'abcisse de ce point de contact. Donc les équations données plus haut qui font dépendre x, y de ρ et σ, permettent de trouver directement le lieu de ces centres de courbure lorsque la courbe f est donnée ou réciproquement. Pour les coniques on a trouvé que σ et ρ sont proportionnels à x et y, le lieu des centres de courbure est donc une conique semblable.